Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – análisis

Miércoles 18 de noviembre de 2015 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

8815 – 7228

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 5]

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por $f : x \to \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 - x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Demuestre, utilizando límites, que f

(a) es continua en $x = 0$; [2]

(b) no es derivable en $x = 0$. [3]

2. [Puntuación máxima: 10]

Sea $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$.

(a) Muestre que $f''(x) = 2\left(f'(x) - f(x)\right)$. [4]

(b) Siga derivando el resultado del apartado (a) y halle así el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x)$, hasta el término en x^5. [6]

3. [Puntuación máxima: 11]

(a) Demuestre mediante inducción que $n! > 3^n$, para $n \geq 7$, $n \in \mathbb{Z}$. [5]

(b) A partir de lo anterior, utilice el criterio de comparación para demostrar que la serie $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r}{r!}$ converge. [6]

4. [Puntuación máxima: 14]

Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Ilustre gráficamente la inecuación $\dfrac{1}{5}\sum_{r=1}^{5} f\left(\dfrac{r}{5}\right) < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < \dfrac{1}{5}\sum_{r=0}^{4} f\left(\dfrac{r}{5}\right)$. [3]

(b) Utilice la inecuación del apartado (a) para hallar un límite inferior y uno superior para π. [5]

(c) Muestre que $\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r x^{2r} = \dfrac{1+(-1)^{n-1} x^{2n}}{1+x^2}$. [2]

(d) A partir de lo anterior, muestre que $\pi = 4\left(\sum_{r=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^r}{2r+1} - (-1)^{n-1}\int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)$. [4]

5. [Puntuación máxima: 20]

Las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ pasan ambas por el punto $(1, 0)$ y se definen mediante las ecuaciones diferenciales $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - y^2$ y $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x^2$, respectivamente.

(a) Muestre que la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1, 0)$ es normal a la curva $y = g(x)$ en el punto $(1, 0)$. [2]

(b) Halle $g(x)$. [6]

(c) Utilice el método de Euler con un paso de $0{,}2$ para estimar $f(2)$ con una aproximación de 5 cifras decimales. [5]

(d) Explique por qué $y = f(x)$ no puede cruzar la isoclina $x - y^2 = 0$, para $x > 1$. [3]

(e) (i) Dibuje aproximadamente las isoclinas $x - y^2 = -2, 0, 1$.

(ii) Sobre esos mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de f. [4]